

6章補足 はりに生ずるせん断応力

今までの解析から、はりに荷重が作用するとき、はりの内部にはせん断力 V_x と曲げモーメント M_x が、変形に対する抵抗として生ずることがわかった。曲げモーメント M_x によって生ずる応力が分かったので、ここでは、せん断力 V_x によって生ずるせん断応力を求めてみる。

断面は高さ h 、幅 b の長方形断面とする。図に示すように、 Z 軸に平行な横 dx 、縦 dy 、長さ b の微小部分に生ずるせん断力は、せん断力 V_x により、はりの断面上に生ずるせん断力 τ_{xy} であり、 Z 方向には同じ大きさである。また、微小部分において、はりの断面と 90 度をなす面 (x - z 平面と平行な面) には、式(1.12)の結果から、向きが反対で、同じ大きさのせん断応力、 τ_{yx} が生ずる。また、 $y=h/2$ 、 $-h/2$ のはりの表面では自由表面でありせん断応力は 0 である。このことから、せん断応力は、 y 軸に沿って変化することが考えられる。

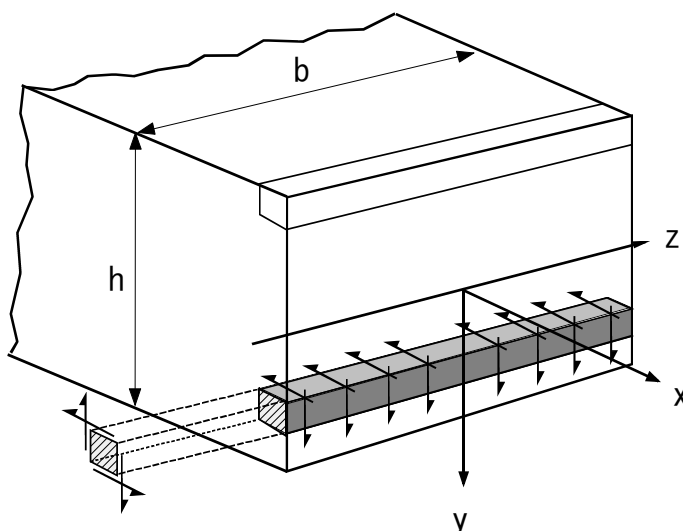


図 C6-1

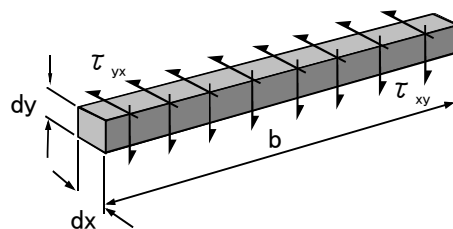


図 C6-2

はりの任意の位置に m - n 断面と m' - n' 断面からなる幅 dx の微小部分に、 $pqn'n$ の長方形領域に作用する力を調べ、その後、力の釣り合いを求める。曲げモーメントにより生ずる応力 σ は式(6.7)より

$$\sigma = \frac{M_x}{I} y$$

となる。 pn 面に作用するこれらの垂直応力による力の合計 P は、

$$P = \int_{y_1}^{c_1} \sigma b dy = \int_{y_1}^{c_1} \frac{M_x}{I} y b dy = \frac{M_x}{I} \int_{y_1}^{c_1} y b dy \quad (C6-1)$$

となる。一方、 qn' 面に作用するこれらの垂直応力による力の合計 P' は、

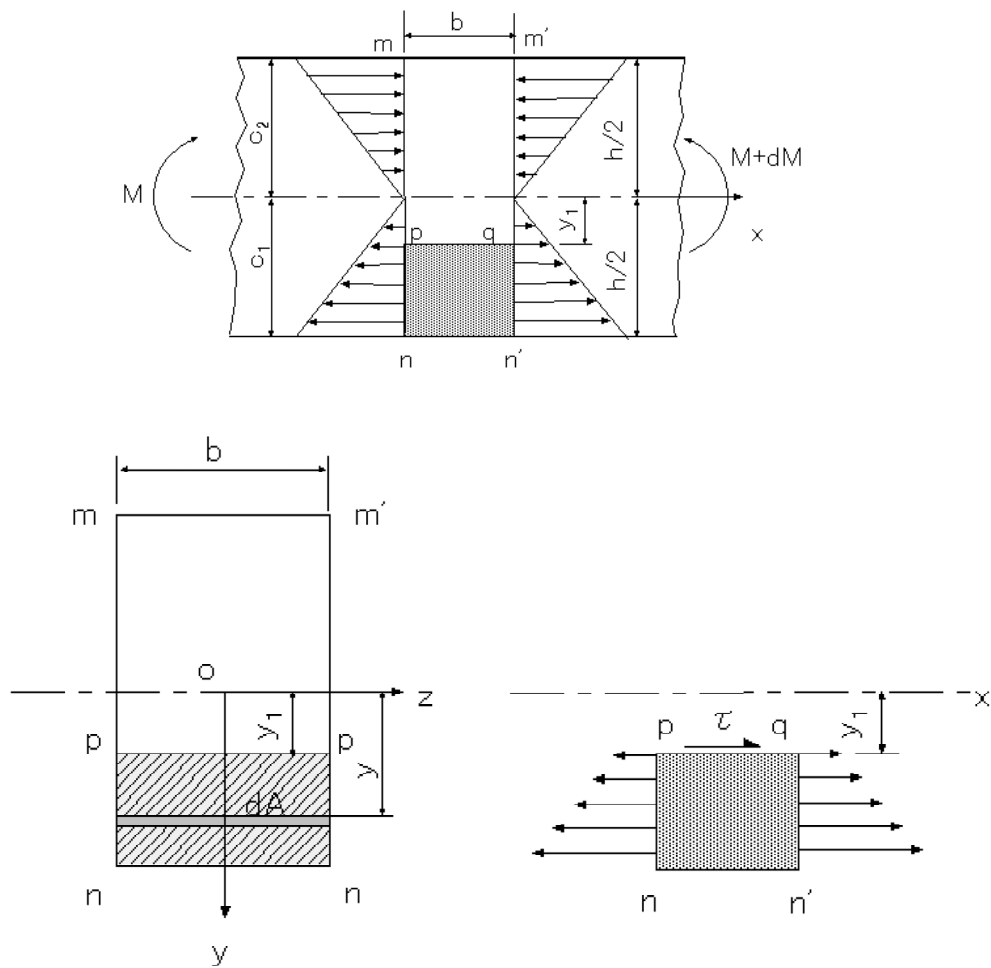


図 C6-3

$$P' = \int_{y_1}^{c_1} \sigma b dy = \int_{y_1}^{c_1} \frac{M_x + dM_x}{I} y b dy = \frac{M_x + dM_x}{I} \int_{y_1}^{c_1} y b dy \quad (C6-2)$$

となる。

釣り合いの条件は、

$$-P + \tau_{yx} b dx + P' = 0 \quad (C6-3)$$

* τ_{yx} の添え字の意味は、次のような取り決めである。最初の文字は、平面を示す。次の文字は方向を示す。yx の場合は、y 軸と垂直な面における x 方向の応力ということになる。添え字が同じ文字の場合は垂直応力、異なる場合はせん断応力となる。

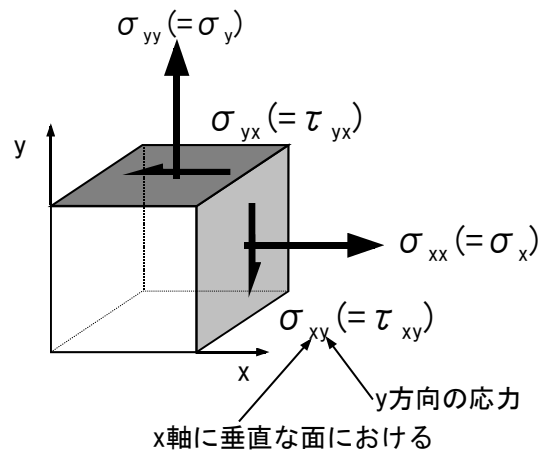


図 C6-4 3次元の場合の応力表現

式(C6-3)に、式(C6-1)、式(C6-2)を代入し整理すると

$$\begin{aligned} \tau_{yx} b dx &= \frac{M_x}{I} \int_{y_1}^{c_1} y b dy - \frac{(M_x + dM_x)}{I} \int_{y_1}^{c_1} y b dy \\ \tau_{yx} &= -\frac{dM_x}{I b dx} \int_{y_1}^{c_1} y b dy \\ \tau_{yx} &= -\tau_{xy} \\ \tau_{xy} &= \frac{dM_x}{I b dx} \int_{y_1}^{c_1} y b dy \end{aligned} \tag{C6-4}$$

5章補足、式(5.31)から

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{dM_x}{dx} \\ \tau_{xy} &= \frac{V_x}{I b} \int_{y_1}^{c_1} y b dy \end{aligned} \tag{C6-5}$$

上式の積分の値は、**面積モーメント**と言われている。力のモーメントと対応させ、力の代わりに面積を用いているからである。具体的に長方形断面の場合には

$$I = \frac{b h^3}{12}$$

$$\int_{y_1}^{c_1} y b dy = \int_{y_1}^{h/2} y b dy = b \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y_1}^{h/2} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad (\text{C6-6})$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{V_x}{Ib} \int_{y_1}^{c_1} y b dy = \frac{V_x}{Ib} \cdot \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) = \frac{V_x}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \\ &= \frac{6V_x}{bh^3} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) = \frac{3(h^2 - 4y_1^2)}{2bh^3} V_x \end{aligned} \quad (\text{C6-7})$$

$y_1=0$ (中立面上)では、 τ_{xy} は最大値を示し、

$$\tau_{xy} = \frac{3(h^2 - y_1^2)}{2bh^3} V_x = \frac{3}{2bh} V_x \quad (\text{C6-8})$$

$y_1=\pm h/2$ においては $\tau_{xy}=0$ である。中間領域では、放物線的に変化する。

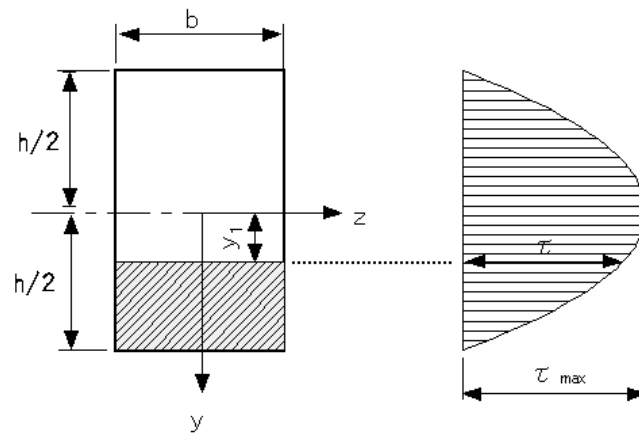


図 C6- 5

せん断に対して強度が劣る材料の場合、あるいは精密な設計をする場合は、式(C6-8)を考慮する必要がある。