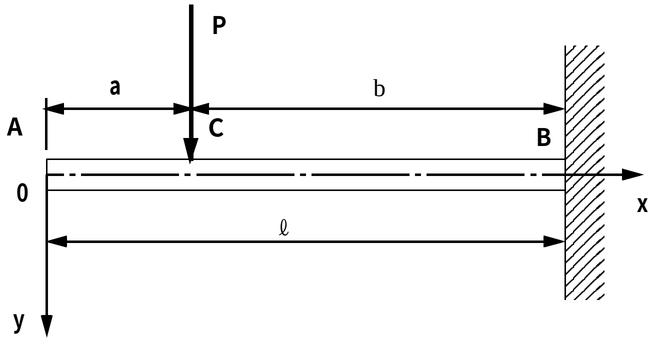
【６章の例題】

はりの中間に荷重 P が作用する図の場合のたわみ曲線を求める。



【解】

曲げモーメント M_x は,

$$0 < x < a \text{ の時} \qquad M_x = 0$$
$$a < x < \ell \text{ の時} \qquad M_x = -P(x-a)$$

となる。

Ａ－Ｃ間のはりの部分には，曲げモーメントは作用しないのではり自身は変形しないが，たわみは，Ｃ－Ｂ間のたわみ角の式から得られる，x=a におけるたわみ角で決まり，直線的に生ずる。Ｃ－Ｂ間のたわみの式から求めてみる。

式(6.34)のたわみの式から

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M_x \text{ ---------(1)}$$

$$\therefore \qquad EI\frac{d^2y}{dx^2} = P(x-a) \text{ -------(2)}$$

となる。式(2)の両辺を 1 回積分する。

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{P(x-a)^2}{2} + C_1 \text{ ---------(3)}$$

さらに式(3)の両辺を積分する。

$$EIy = \frac{P(x-a)^3}{6}x^3 + C_1x + C_2 \text{ -------(4)}$$

B 点でたわみとたわみ角が０から

$$x = \ell \text{ で} \qquad \theta = \frac{dy}{dx} = 0, \qquad y = 0 \text{ -----(5)}$$

となる。

式(3),(4)に代入する。

$$0 = \frac{P\left(\ell - a\right)^2}{2} + C_1$$

$$0 = \frac{P\left(\ell - a\right)^3}{6} + C_1 \ell + C_2$$

整理するとC₁,C₂は次式のように求められる。

$$C_1 = -\frac{P\left(\ell - a\right)^2}{2} ----------(6)$$

$$C_2 = \frac{P\left(\ell - a\right)^2\left(2\ell + a\right)}{6} ------(7)$$

式(3),(4)にC₁,C₂を整理すると

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{P(x-a)^2}{2} - \frac{P(\ell - a)^2}{2} = \frac{P}{2}\left\{(x-a)^2 - (\ell - a)^2\right\}$$

$$= \frac{P}{2}(x-\ell)(x+\ell-2a) ----------(8)$$

$$EIy = \frac{P(x-a)^3}{6} - \frac{P(\ell-a)^2}{2}x + \frac{P(\ell-a)^2(2\ell+a)}{6} -----(9)$$

が得られる。

x=aにおいて，たわみy_A，たわみ角θ_Aとすると，(8)式からたわみ角θ_Aは

$$EI\theta_A = \frac{P}{2}(a-\ell)(a+\ell-2a)$$

$$\therefore \quad \theta_A = \frac{P(a-\ell)(\ell-a)}{2EI} = -\frac{P(\ell-a)^2}{2EI} ------(10)$$

となり，　たわみy_Aは

$$EIy_A = \frac{P(a-a)^3}{6} - \frac{P(\ell-a)^2}{2}a + \frac{P(\ell-a)^2(2\ell+a)}{6}$$

$$\therefore \quad y_A = \frac{P(\ell-a)^3}{3EI} \qquad --------(11)$$

となる。

0<x<aにおいて，たわみの式を

$$y - y_A = \theta_A(x-a) \qquad -----(12)$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{P(\ell - a)^2}{2EI}(x - a) + \frac{P(\ell - a)^3}{3EI} \\
&= -\frac{P(\ell - a)^2}{6EI}(3x - 2\ell + a) \qquad ------(13)
\end{aligned}
$$

となる。

たわみの最大値δ_{max}は x=0 において生じ,

$$
\delta_{max} = \frac{P(\ell - a)^2(2\ell + a)}{6EI} \qquad ------(14)
$$

である。 たわみ角は当然, θ_Aである。