数学と力学の基礎知識

高校で学んだ数学や物理、化学などの知識は、本来、生活する上で必要な事項であるが、将来、生活を便利にする機械やものなどを作り、そして、これらを人々に提供するプロフェッショナルとして活躍する技術者にとっては、物理や化学などの自然科学は，最も基本をなす知識を与えてくれるものである。

自然科学においては，自然界の法則が導かれた過程と法則を理解し，この法則を述べる専門用語をきちっと理解することは重要である。その際、数量間の関係を求めるときの手段として，数学は必須の知識である。高校まで、物理、化学や数学は別々の科目として扱われてきたので、学生諸君は、それらは互いに、関係のない科目と感じている方が多い。しかしながら、工学は、自然科学における法則の応用であり，物理、化学や数学は、密接に関係するものであり、特に、数学は、自然科学科目の共通言語のようなものであることを工学を志す学生諸君は自覚していただきたい。

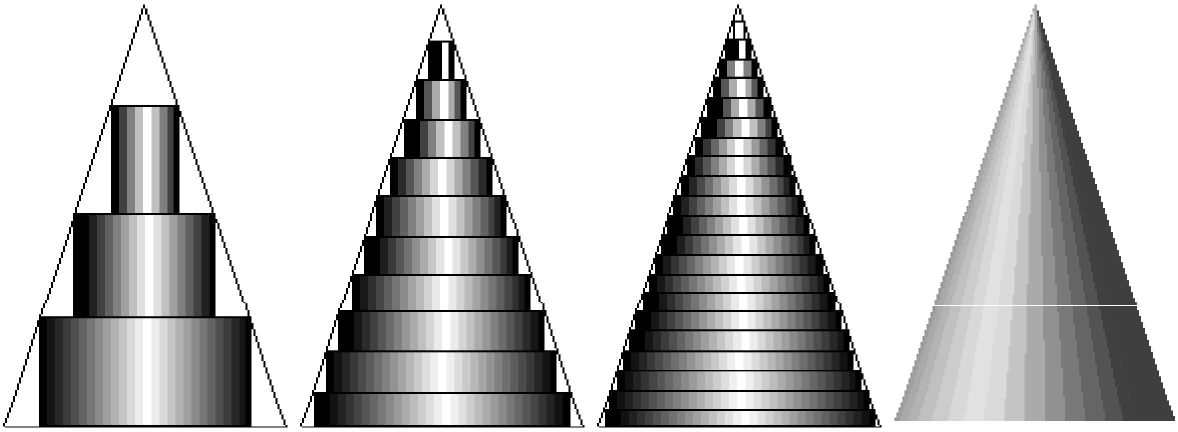
材料力学では，力の釣り合い，モーメントの釣り合いなどの力学的知識を使い，材料中に生ずる抵抗力を計算によって導き，設計計算に必要な基本的な法則を定量的に明らかにする。この時，物理における力学と量的な関係を導く数学の知識が必要とされる。

この章では，数学と力学の基礎的事項について述べる。公式を覚えていただくことは目的ではなく、すでに学んだ簡単な事項について、どういうことを意味しているのか、じっくり考えて理解していただくことが目的である。そうすることによって、工学の専門科目にごくすんなりと入れることを期待している。

1　関数の極限値

関数の極限値は、微分、積分の基礎であるとともに、工学においては、現象の結果が，十分時間的が経過した後どうなるか、あるいは，遠く離れた位置における値など考察するときに重要である。

図　1(d)の円錐の体積を考えてみる。円錐の体積を簡単に求めるために，(a)のように同じ高さ h の円柱を階段状に積み重ねてみる．三角形は円錐の外形線であるが，これに収まるように同じ高さの円柱を重ねる。円柱の高さが小さくなると(図 1(b),(c))円柱の外形線との隙間の面積は小さくなり，円柱の体積の合計は円錐の体積に近づくことが予想される。高さｈを０にしたら，円柱は存在しなくなるが，高さｈを限りなく０に近づける状態を想定することが**極限**で，この状態を$h \to 0$と表現する。$h \to 0$の極限では，階段状の部分は直線に近づき，ほぼ，階段状の円柱を重ねた体積の合計は，円錐の体積と同じくなることが考えられる。



(a) 3分割　　(b) 10分割　　(c)20分割　　(d)円錐

図 1　積み重ねる円柱の高さを小さくしてゆくと円錐の体積に近づく

簡単な極限値の例を見てみる。図 2は y=1/x のグラフである。グラフの形からわかるように，x が限りなく大きくなり，∞大になったとき，y の値は限りなく０に近づく。このことを極限値の表現で

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad (1)$$

と書く。lim の記号は limit(限界，限度の意)の略である。また，x が＋の方から限りなく０に近づくときは，y の値は＋∞大になる。逆に、x が－の方から限りなく０に近づくときは，y の値は－∞大になる。この時も，極限値の記号で次のように書く。

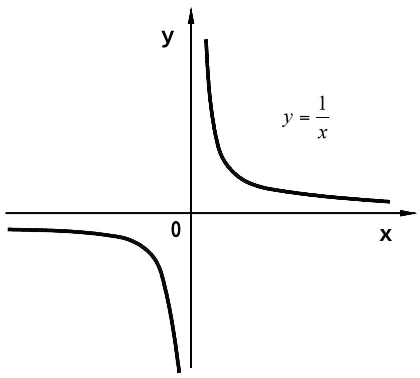


図 2　y=1/x のグラフ

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=\infty \qquad \lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty \qquad (2)$$

次の例は工学でよく使われる極限値の式である。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (3)$$

別の表現では

$$x<<1 \quad \text{のとき} \quad \sin x \quad x \qquad (4)$$

と書く。x が非常に小さいとき、sinx と x は近似的に等しい。

材料力学においても、せん断ひずみ、圧力容器に生ずる２軸応力を導く式で、近似式として、前式の結果から、次のように考える。xが小さいとき、三角関数 sinx は、近似的にxに

等しい。式が簡単になり、微分，積分がしやすく、計算もしやすくなるからである。　また、図式的には、ｘが小さくなると、y=sinx のグラフは、y=ｘのグラフに近づくことを意味している。

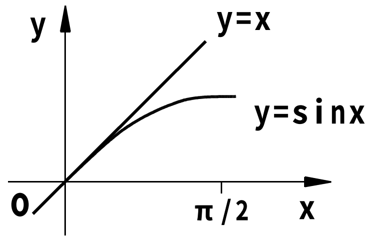


図　３　x が小さくなると y=sinx と y=x のグラフはほぼ一致する

同様に,

$$\phi << 1 \text{のとき，} \tan\phi \quad \phi \quad \because \tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} \qquad \phi \to 0 \quad \text{のとき，} \cos\phi = 1, \sin\phi = \phi$$

の近似式もよく使われる。近似式を使うことにより、数式の扱いが簡単になることから多用されている。つまり、一例として、tanx の積分より，x の積分の方が簡単だからである。

２　微分法

微分法も科学における現象を説明する方法として必須の方法である。今，自宅から駅まで行くことを考える。距離は s km とする。途中，最初はゆっくり歩いて，あるところから時間がないので走ったとする。所要時間はｔ分であった。自宅から駅までの平均速度は，s/t　[km/分]となるが，歩いていたときの速度，走っていたときの速度ははっきりしない。そこで、ある時刻における**瞬間的な速度**を求めようとするのが微分の考え方で，このことを次に述べる。

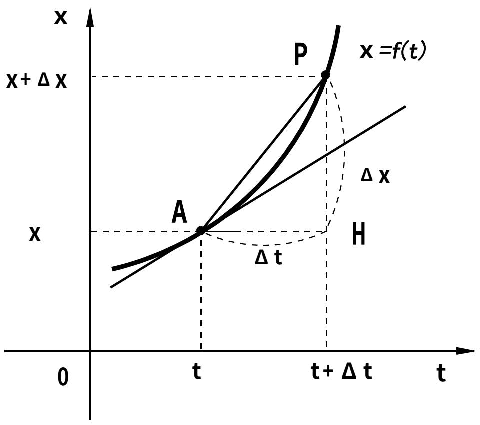
直線運動をしている物体があり，運動を開始後，時刻 t と位置ｘを計測し，位置と時間の関係が，x=f(t)の関係が得られた。横軸に時間ｔ，縦軸に位置ｘをとると図 ４のようにグラフで表せるとする。グラフ上に，Ａ（ｔ，ｘ）点，時刻ｔからΔｔ時間後の位置Ｐ（t+Δｔ,x+Δx）点をとる。この時，Ａの位置から距離Δxだけ進んだことになる。ＡＰ間の平均速度Ｖは

$$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (5)$$

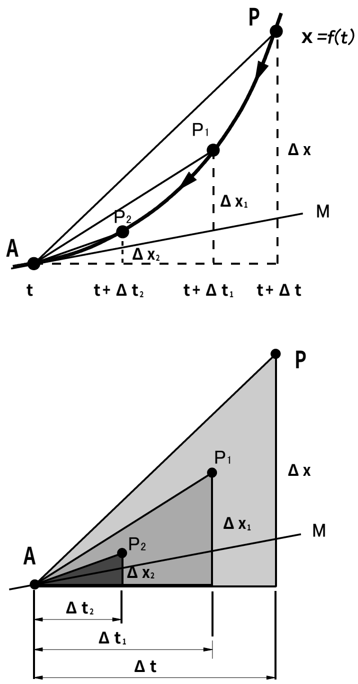
である。Δｔの間隔を更に小さくし，P_1 →　P_2 のようにとって平均速度を求めてみる。グラフ上では，Ｐ点は Ａ点に近づいてゆく。この時，極限の考え方を適用して，Δｔ →０としてみる。

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (6)$$

Ｖは，瞬間の速度であり，この値を**速度**と定義する。



（ａ）時間Δｔ後、位置はΔｘ変化



（ｂ）P が A に近づくと AP は AM に接近する

図　４　Δｔを０に近づけたら、平均速度と傾きは

図 ４(b)から 直線ＡＰの傾きは，Δｔ →０の極限を考えるとＡ点における曲線の接線ＡＭに近づくことが理解できる。

つぎに，一般の関数 y=F(x)で，この極限値を求めてみる。

図 5で、次の式で定義される値をｘがａからａ＋ｈ変わるときのｆ(x)の平均変化率と言う．時間ｔ、距離x=f(ｔ)における、時間ｔからｔ＋Δｔの間の平均速度に相当する．

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad (7)$$

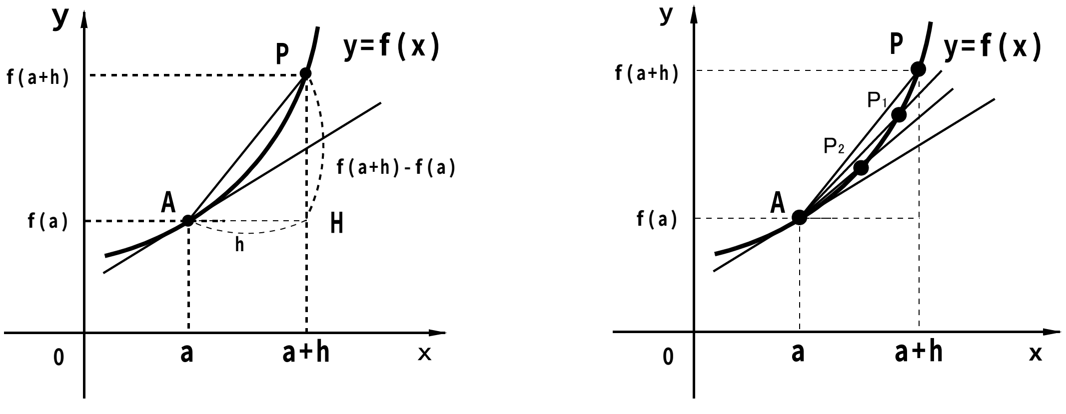


図　５　一般の関数 y=f(x)での変化の様子

f(x)の平均変化率において、hが限りなく0に近づくとき、その極限値を関数 y=f(x)の x=a における微分係数，または変化率と言い、f'(a)で表す。

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (8)$$

微分係数 f'(a)は，図において、P点を限りなくA点に近づけると（h →0）、APは、A点における y=f(x)の接線に近づく様子が分かる。従って、極限値は f'(a)は、A点における y=f(x)の接線の傾きとなる。

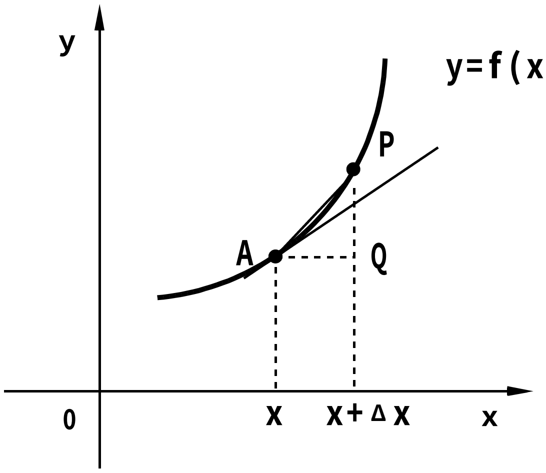


図 6

a→x，h→Δxと置き換えて、

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (9)$$

f'(x)を関数 f(x)の導関数という。X の関数 f(x)から、f'(x)を求めることを、

「関数 f(x)をxについて微分する」

と言う。

y=f(x)=x^2 の場合の計算をしてみる。

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^2 + 2\Delta x \cdot x + \Delta x^2) - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x \qquad (10)$$

f(x)=x^3,x^4・・・・・・, x^n の場合の計算をしてみると、次の法則がある.

$$f(x) = x^n \qquad f'(x) = nx^{n-1} \qquad n \geq 1 \qquad (11)$$

従って、いちいち極限値を計算する必要が無くなる。他の関数についても、すでに計算されており、よく使うもの（例えば、三角関数、指数関数など）だけを覚え、複雑な場合は、積分と同様、数学公式集を活用すればよい。

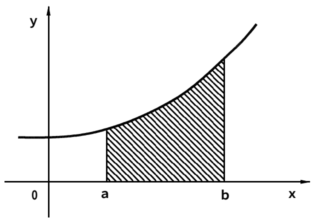
3　積分法について

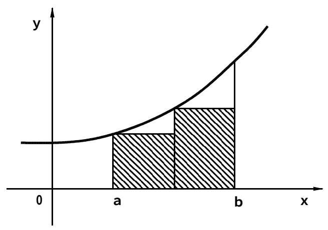
積分法は、理系の分野においては、必須の知識である。いわゆる積分公式は、知っているのに越したことはないが、必要な場合は、公式集（例えば、岩波書店，数学公式Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ）を利用すればよい。単に積分した結果を得るこに習熟するよりも、積分によって何が得られ、積分の考え方を理系の問題で適用する際、積分はどういう意味を持つのか、基本的なことを理解することが、工学等の問題を解く際に、あるいは、教科書等の数式の物理的な意味を理解するために必要である。ここでは、材料力学中で出てくる断面２次モーメントを求めるときの積分の基礎として、積分の定義である**区分求積法**の説明と積分の基本的な力学への応用について述べる。

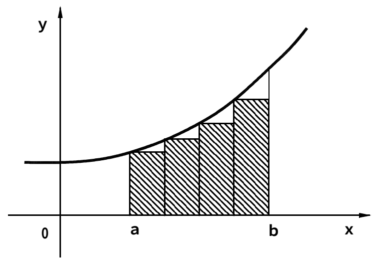
◆定積分について

関数y=f(x)で表される曲線と直線x=a，x=b，ｘ軸で囲まれる領域（図 7(a)の斜線部）の面積Ａを求めることを考える。図 7(b)のように、曲線の下に、同じ幅の長方形を作る。この２つの長方形の面積の和と曲線で囲まれる面積Ａは、図中の三角形に見える空白の部分だけ差がある。さらに、図 7(c)のように、４つに等分割すると４つの長方形の面積の和と面積Ａの差は、図 7(b)の場合よりも小さくなる。このことから、さらに細かく等分割し（極限値の考え方)、長方形の面積の総和をとれば、面積Ａに限りなく近づくと考えられる。次に、このことを数式を用いて説明する。区間［a,b］をn等分し、図 8のようにｎ個の長方形の面積の和Ｓを求めることを考える。当然、真の面積ＡとＳは図中の三角形に見える部分の和だけ差がある。

(a)　斜線の面積Ａ

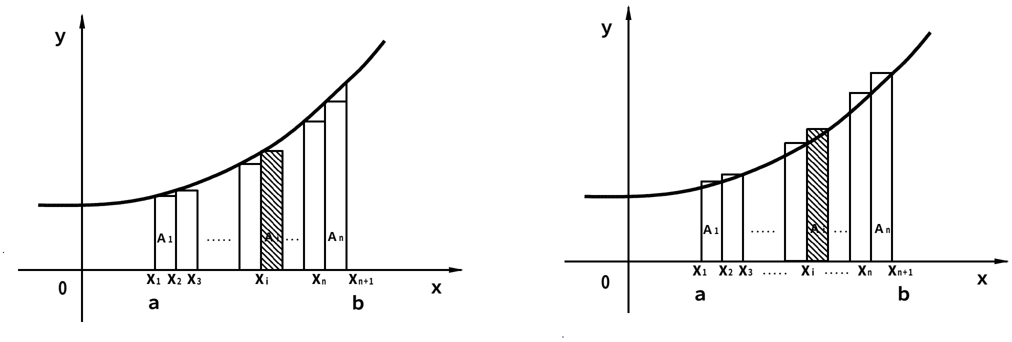






(b)．２分割　　　　　　　　　　　(c)．４分割

図 7　　斜線部の面積と長方形の和



(a)．下側にある長方形の面積の総和　　　　　(b)．上側にある長方形の面積の和

図　8

区間の幅h＝(b-a)/n、長方形の高さｙは、ｘの位置では　ｙ＝ｆ（ｘ）の関係がある。

$$x_1 = a, x_2 = a + h, x_3 = a + 2h, \cdots\cdots, x_i = a + (i-1)h, \cdots\cdots, x_n = a + n \cdot h$$
$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3), \cdots\cdots, y_i = f(x_i), \cdots\cdots, y_n = f(x_n)$$

位置x_iは　$x_i = a + ih = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}$

ｉ番目の長方形の面積A_i　$A_i = y_i \cdot h = f(x_i) \cdot \dfrac{b-a}{n}$,

$$\text{ただし，} x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n} \qquad (12)$$

*ここに出てくるnに関する式は高校数学「数列」を参照して下さい

具体的に、　ｙ＝ｆ(x)＝ｘ^2　のとき、ｉ番目の長方形の面積A_iは

$$x_i = a + (i-1)h = a + (i-1)\frac{b-a}{n}$$
$$A_i = f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n}$$
$$= \left\{ a + (i-1) \cdot \frac{(b-a)}{n} \right\}^2 \frac{b-a}{n}$$
$$= \frac{(b-a)a^2}{n} + \frac{2a(b-a)^2(i-1)}{n^2} + \frac{(b-a)^3(i-1)^2}{n^3} \qquad (13)$$

となる。けっきょく、長方形の面積の総和Ｓは

$$S = A_1 + A_2 + \cdots\cdots + A_i \cdots\cdots + A_n = \sum_{i=0}^{n} A_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{(b-a)a^2}{n} + \frac{2a(b-a)^2(i-1)}{n^2} + \frac{(b-a)^3(i-1)^2}{n^3} \right\} \qquad (14)$$

となる。上式の右辺の記号Σは、左辺の長たらしい式を記号で表したもので、ギリシャ文字Σは、英語のＳであり、「**合計**（summation)」の意味である。

下式の整数の和の公式を利用し、ｙ＝ｆ(x)＝ｘ^2 のときの値を求めてみる。

$$\sum_{i=1}^{n} a = an, \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1), \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \tag{15}$$

Ａ$_i$の右辺を項目毎に和を求めると次のように計算される。

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{(b-a)a^2}{n}\right\} = \frac{(b-a)a^2}{n}\sum_{i=1}^{n}1 = \frac{(b-a)a^2}{n}\cdot n = (b-a)a^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{2a(b-a)^2(i-1)}{n^2}\right\} = \frac{2a(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{2a(b-a)^2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$
$$= \frac{a(b-a)^2(n-1)}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{(b-a)^3(i-1)^2}{n^3}\right\} = \frac{(b-a)^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \frac{(b-a)^3}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n-)n(2n-1)$$
$$= \frac{(b-a)^3(n-)(2n-1)}{6n^2}$$

と、計算される。

定積分の結果，面積Ａは，a=5,b=10のとき，A=292が得られる。一方、長方形の面積の和は

n=10のとき，　S=273
n=20のとき，　S=282
n=100のとき　S=290

となり，ｎが大きくなるとＡに近づくこと、この程度のｎの値でも長方形の面積の和の値は面積Ａにかなり近いことが分かる。

区間の幅を細かくすれば(n→大)、曲線の下の面積Ａと長方形の面積の和Ｓの差は小さくなり、ＳはＡに近づくことは図と計算例より理解できる。別の言い方をすると，区間の幅を限りなく０に近づける(h→0)。すなわち、ｎ→∞のＳの極限値を求めることに相当する。ｎ→∞のとき１／ｎ→0であることを適用し、

$$\lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{(b-a)a^2}{n} + \frac{2a(b-a)^2(i-1)}{n^2} + \frac{(b-a)^3(i-1)^2}{n^3}\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}(b-a)a^2 + \lim_{n\to\infty}\frac{a(b-a)^2(n-1)}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)^3(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}(b-a)a^2 + \lim_{n\to\infty}a(b-a)^2\left(1-\frac{1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$
$$= (b-a)a^2 + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} = \frac{1}{3}(b^3-a^3) \tag{16}$$

が計算される。

Ｆ（ｘ）を次のように置くと、Ｓの極限値の結果は、次のようになっている。

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3$$
$$A=F(b)-F(a) \qquad (17)$$

$$\lim_{n\to\infty}S=\frac{1}{3}(b^3-a^3)=F(b)-F(a) \qquad (18)$$

また、Ｆ（ｘ）とｆ（ｘ）の関係は次のようになっている。

$$F'(x)=\left\{\frac{1}{3}x^3\right\}'=x^2=f(x) \qquad (19)$$

<u>Ｆ(ｘ)は微分するとｆ(ｘ)になる関数である。</u>

図 8のＳ’の場合も結果は、計算してみると次のようになる。

$$x_i=a+ih$$
$$A_i=(a+i\frac{b-a}{n})^2\frac{(b-a)}{n}$$
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S'&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{(b-a)a^2}{n}+\frac{2a(b-a)^2 i}{n^2}+\frac{(b-a)^3 i^2}{n^3}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}(b-a)a^2+\lim_{n\to\infty}\frac{a(b-a)^2(n+1)}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)^3(n+1)(2n+1)}{6n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}(b-a)a^2+\lim_{n\to\infty}a(b-a)^2(1+\frac{1}{n})+\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)^3}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})\\&=(b-a)a^2+a(b-a)^2+\frac{(b-a)^3}{3}=\frac{1}{3}(b^3-a^3)\end{aligned} \qquad (20)$$

$$\lim_{n\to\infty}S'=\frac{1}{3}(b^3-a^3)=F(b)-F(a) \qquad (21)$$

Ｓ’，Ｓ，Ａの図８(a),(b)における大小関係から、Ｓ'＜Ａ＜Ｓなるはずである。ＳとＳ’の極限値が等しいのであるから、面積Ａは

$$A=F(b)-F(a) \qquad (22)$$

となる。

結論として、「長方形の和を求め、極限値を計算する」面倒な手順をとる必要はなく、

「微分したらf(x)になるような関数F(x)を求め、区間の両端のF(x)の値の差をとれば求める面積Ａが計算される。」

この計算手順を記号で表し

$$\int_a^b f(x)dx \tag{23}$$

と決める。積分記号である。１７世紀のドイツの数学者、ライプニッツが提案した記号で、ドイツ語のズマチオン（Summation，合計）の頭文字、Ｓから発展した記号である。「**xの位置に小さな長方形(幅dx,高さf(x))の面積(f(x)･dx)を求め、次に，他のｘについても同様に，長方形の面積を求め，曲線とx=a,x=bとx軸で囲まれた範囲ですべての長方形の面積の和を求め、この値の極限値をとること**」を意味する。

ｙ＝$f(x)=x^2$ の例では、幅dx=h,高さx_i^2 で，小さな長方形の面積はx_i^2dx，そして、dxを限りなく小さくしたとき、長方形の面積の総和は面積Ａに一致する。

ｙ＝$f(x)=x^2$ の例では、計算結果は、次式となる。

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) \tag{24}$$

$f(x)=x^2$ の時は、微分したら$f(x)$になる関数$F(x)$は，$F(x)=x^3/3$であり、

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{25}$$

となっている。

積分した結果の関数の形を求めるテクニックよりも，今まで述べたような方法から積分は生まれたので，この意味を理解することが重要である。工学の基本的な問題はここから出発していることが多い。

◆積分の応用

前述の例では、ｘ軸，ｙ軸とも、長さ［例えば、mm］の単位として、y=f(x)で表されるグラフとx=a,x=bで囲まれる部分は［縦軸の量］×［横軸の量］＝面積［mm²］であると考えた。

図のように、縦軸，力Ｆ［N］，横軸，伸びx[mm]とする。Ｆとｘの間には、バネの場合、フックの法則　Ｆ＝ｋｘが成り立つ。

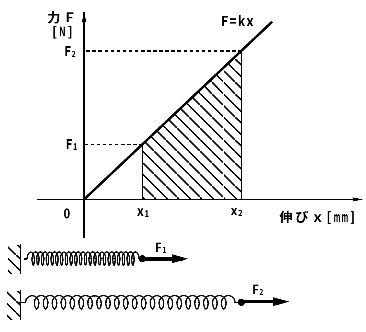


図 9　バネに働く力と伸びの関係

図 9のx_1，x_2の区間を積分した結果は、

$$\int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \left[\frac{kx^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) \tag{26}$$

となる。単位を見てみると

［縦軸の量　力　N］×［横軸の量 伸び mm］＝［仕事量 N・mm］　　　　（ 27）

であり、仕事量、エネルギーの単位である。定積分の結果として、力Ｆ＝ｋｘが働いた結果、x_1からx_2までバネがのびたとき，外力Fがバネに与えた仕事量，あるいは，バネの内部にひずみエネルギー（詳細については後述）の形で蓄えられた仕事量となる。

このように、定積分で得られる結果である，図の面積が何を表す量かは、f(x)とｘの物理量で決まってくる。逆に、いろいろな量を与えると、種々の［縦軸の量］×［横軸の量］が得られることになる。このことが工学の分野で様々な量を求めるとき，定積分，不定積分が応用される理由である。

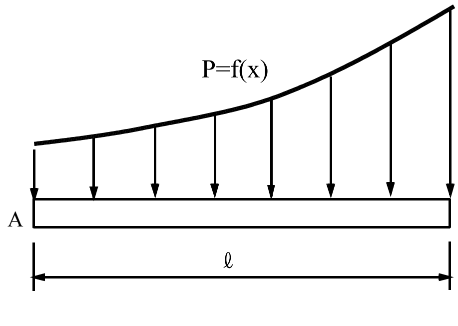
◆ 微小部分の考え方

工学では、しばしば微小部分ｄｘをとり、この部分の状態の考察から，積分を行って全体の状態量を求める場合が多い。微小部分ｄｘは極限の状態における幅であり、ほとんど０と考えて良い。積分の定義において，nを∞大としたときの長方形の幅hに相当する。

はりに作用している単位長さ当たりの荷重がP=f(x)で，距離ｘとともに大きさが変化する（不等分布荷重）場合に、A点回りのモーメントを求める。１点に作用する力（集中荷重）の場合は，(距離)×(力)で簡単に求めることが出来るが、分布荷重の場合は，単純に計算できない。そこで、A点からxの位置に，微小部分dxを図のようにとり、この部分に作用している力の分布状態を調べる。実際は、微小部分dxには，図のように分布する荷重が作用するが、ｄxは非常に小さいので(極限の考え方)，この範囲では力は一定で，P=f(x)であるとする。こうすることによって小さい部分dxに作用する力の合計は，f(x)dxとなり，f(x)dxは集中荷重と同じと考えて，モーメントは，(距離)×(力)=x・f(x)dxと計算される。

積分の定義においては，微小部分ｄｘは、h=(b-a)/n に相当し、x・f(x)dxは，Ａi に相当する。その後，他のｘについてもｄｘをとり，モーメントを計算し(積分の定義においては，A_1,A_2,A_2,・・・・・,A_n,を計算することに相当)、すべての和を求めて，極限値をとること，つまりはり全体にわたって積分すれば計算できる。こうすることによって、不等分布荷重によるモーメントの総和が計算される。

微小部分ｄｘ考えることによって，極限の定義を使かい、変化する量(力f(x))と他の値(距離ｘ)をかけた量を簡単に計算することが出来る。



$$M_A = \int_0^{\ell} x f(x) dx$$

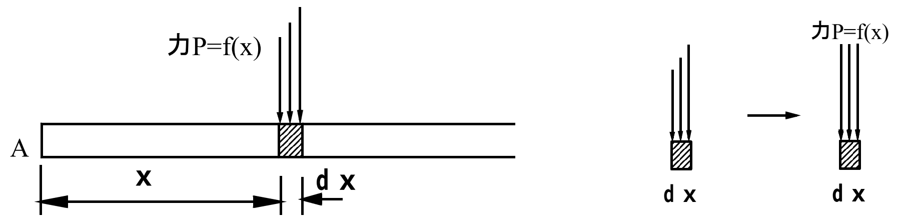


図 １０

微小部分ｄｘは、積分の定義におけるh=(b-a)/n に相当し、これをもとに、A_i を求めていることに相当し，その後，他のｘについてもｄｘをとり，すべての位置における微小部分に作用する力のモーメントの和を計算していることになる。

【例 １】 仕事量を求める場合

大きさが変化しない一定な力F_oが物体に働いた結果、ｓだけ力の方向に移動した場合，力F_oが物体になした仕事Wは、W＝F_oｓと定義されている。

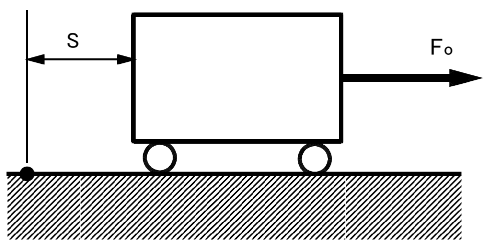
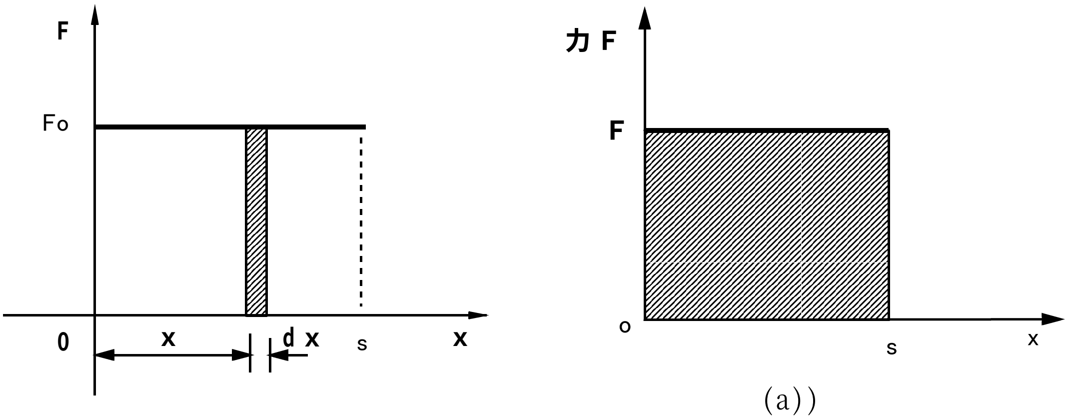


図 11 一定の力F_oが作用した結果、物体は力の方向に距離Sだけ移動

これを積分法により求める。図 12(a)に示すように，力F_oの作用で，微小距離dxだけ移動したときの仕事は$F_o$dxで，図 12（a）の斜線の部分の面積である。これを，０からｓまで足し合わせて総和の極限値（この場合は，一定な力F=F_oであるので，極限値もただの和も一致する）をとる。積分記号を用いて，

$$w = \int_0^s F_0 dx = F_0 \left[x \right]_0^s = F_0 s \qquad (28)$$

と求めることができる。一定な力F=F_oと距離x=ｓ,x軸，y軸で囲まれる長方形の面積である。力一定の場合は，dxを小さくとっても大きくとっても結果は同じで，極限値を考える必要はなくなってくる。



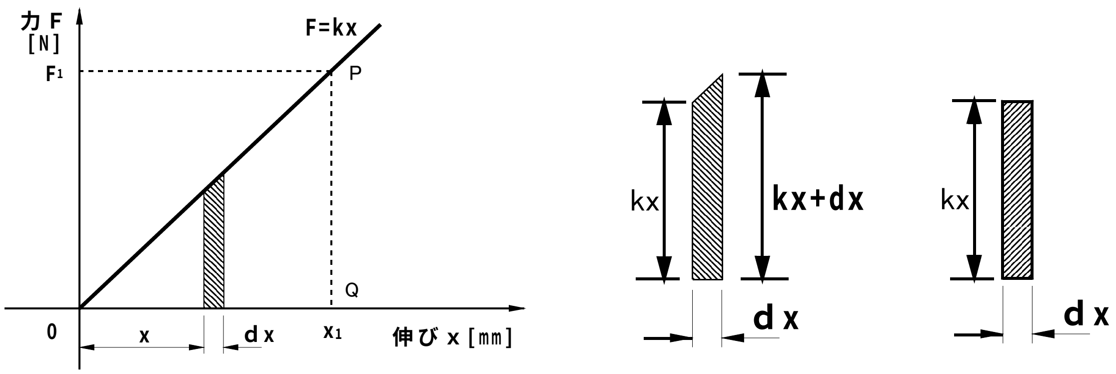
(a))

(b)

図 12　F=F。, x=sと座標軸で囲まれた面積

次に，力の大きさが，距離ｘとともに変化する場合について調べる。

ｘの位置に、非常に小さい幅ｄｘをとり、図 13の斜線の部分の面積(仕事量)を考える。「非常に小さい幅ｄｘ」とは、積分の考えで、ｄｘ→０の極限値，すなわち無限に小さい場合に、長方形の面積（ｋｘ×ｄｘ）は、斜線をした台形状の面積に限りなく近づくことを意味している。このような領域をとることを「ｘの位置に微小部分ｄｘをとる」と言う。



(a) 伸びxからさらに微小伸びdxを与える　(b) dxが非常に小さいとき，台形の面積と長方形の面積はほぼ等しいとする考え方

図 13　バネを伸ばした場合の仕事量

微小部分の面積，仕事量ｄＥ=ｋｘ・ｄｘと求まる。伸び０から、x_1まで伸ばしたときに必要な仕事量Ｅ（グラフでは三角形PQOの面積）は、０からx_1までの微小部分の和すなわち積分を用いて

$$E = \int_0^{x_1} F dx = \int_0^{x_1} kx dx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_1} = \frac{1}{2}kx_1^2 \qquad (29)$$

と計算することができる。

【例　２】モーメントの計算

長さ･のはりに、単位長さあたり、ｗの大きさの等分布荷重が作用する場合に、Ａ点に関するモーメントを求める。Ａからｘの位置に微小部分ｄｘ，この微小部分ｄｘに作用する荷重は、ｄＰ＝ｗｄｘ，この荷重によるＡ点に関するモーメントdM_Aは、

$$dM_A = dP \cdot x = wxdx \qquad (30)$$

となり、０から･までの微小部分のモーメントの和すなわちM_Aは

$$M_A = \int_0^{\ell} wxdx = w\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\ell} = \frac{1}{2}wx^2 \qquad (31)$$

と計算できる。前例では力の大きさが距離とともに変化するので積分を用いたが、この例では、モーメントの値がＡ点からの距離ｘによって変化するので、単純に（力）×（距離）では計算できない。その代わり，微小部分dxでは，非常に小さいのでモーメントはこのdxの範囲では，一定と考えている。微小部分のモーメントを０から･まで足し合わせることによりA点の周りのモーメントが計算される。

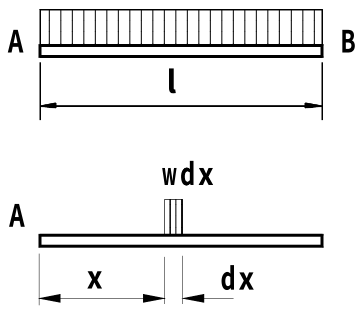


図 14　長さ･のはりに作用する等分布荷重によるA点に関する
モーメントの計算

【例 3】円の面積の計算

次の例は，円の面積を求める積分の例である。すでに，分かっているように，半径Rの円の面積は，πR^2である。円の面積を積分の考え方で計算してみる。図 15の中心からｒの距離にある幅ｄｒの円環状の微小部分の面積dAをとる。

「幅ｄｒは，極限の考え方で，非常に小さいので，斜線部の内側と外側の円周の長さを比較すると，無視できるほど小さく，等しいと考えて良い」。

この部分を切り出すと「幅２πｒ，高さｄｒの長方形」と考えることができる。これが微小部分の考え方である。そこで，この微小面積を，ｒを０から，d/2まで変えて，それぞれのｒの位置で微小面積を計算し，全部足し合わせる。積分の記号でこのことを表し計算すると次式となる。

$$A = \int_0^{d/2} 2\pi r \cdot dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{d/2} = \frac{\pi d^2}{4} = \pi R^2 \qquad (32)$$

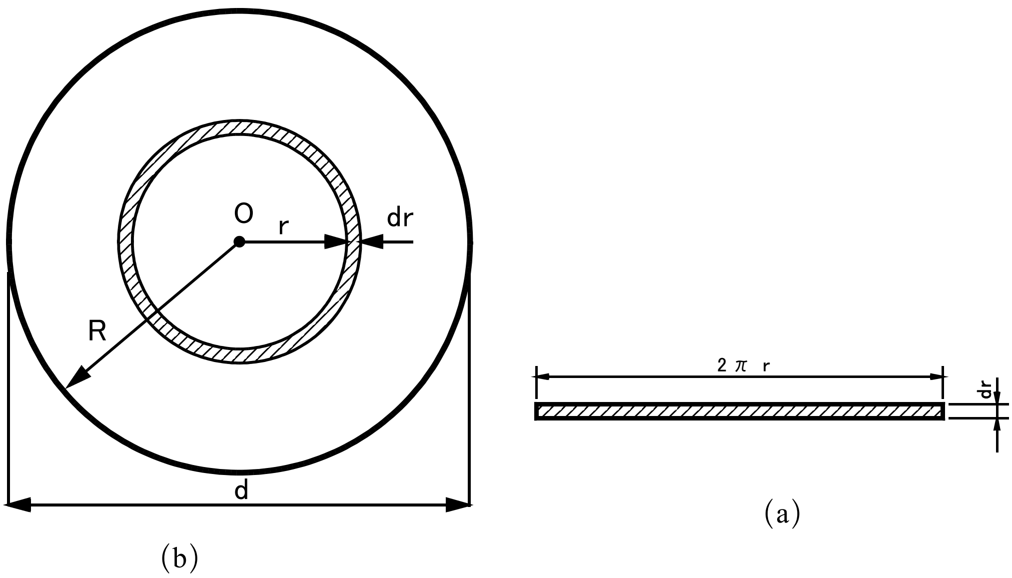


図 15 円の面積を求める

試しに，リング状の面積と長方形の面積を比較してみる。r=30mm,dr=0.01mm のとき，リング状の面積は 1.8850mm^2 ,長方形の面積は 2 π r × dr=1.8853 mm^2 となり，差は 0.0003mm^2 である。さらに，dr を小さくするとほとんど同じ面積と考えて良いことがわかる。

◆ 二重積分

次の積分の式は,

$$\int_A ydA \qquad (33)$$

「微小面積ｄＡに，ｙ をかけて，面積Ａ全体にわたって積分する。」と定義されている。

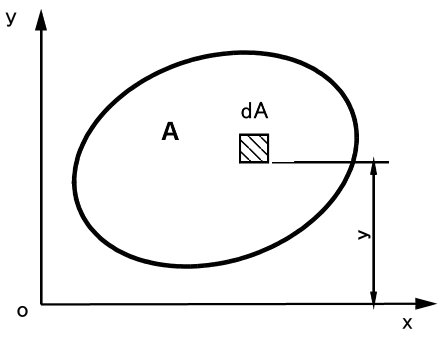


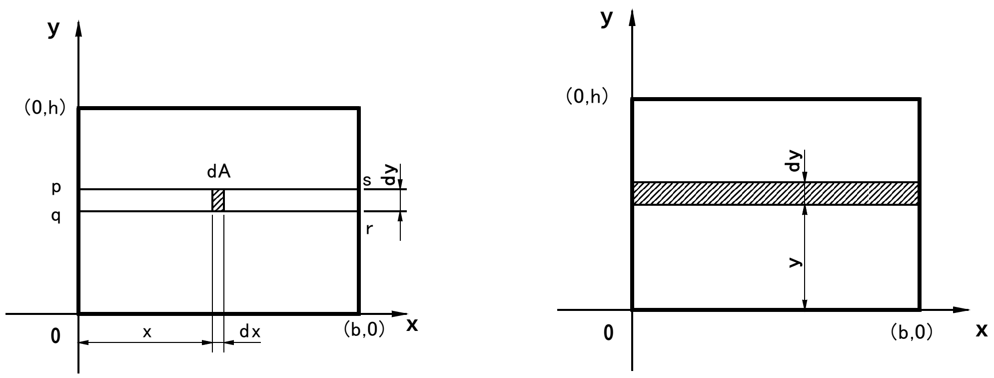
図 16　閉曲線で表される面積Aの図形

この式は，薄い板の重心の位置を求めるときに物理学などで使う式である。 図の閉曲線の式が与えられれば，具体的に積分の値を求めることができる。次に，この積分を用いて，すでに解っている長方形の面積を計算する。

図 17(a)のように，高さ h，幅 b の長方形内の微小面積 dA(=dxdy)をとる。ｘとｙの変域は

$$0 \le x \le b, \quad 0 \le y \le h \tag{34}$$

である。



(a)　　　　　　　　　　(b)

図 17　厚さ t の長方形の板が水平におかれている場合の重心の位置

まず，微小面積 dA の高さ dy は一定として，長方形 pqrs の面積をｘについての積分によって計算すると

$$\int_0^b dydx = dy\int_0^b dx = bdy \qquad \int_0^b 1\cdot dx = [x]_0^b = b \tag{35}$$

となる。つぎに，(b)のように微小面積 pqrs を y について，０から h まで積分する。

$$\int_0^h bdy = b\int_0^h dy = bh \tag{36}$$

となる。こうすることによって長方形の面積全体にわたって x,y を変化させ，微小部分の和を求めたこと，つまり，積分したことになる。

この計算過程を連続して書くと次のようになる。

$$\int_A dA = \int_A dxdy = \int_0^b dx\int_0^h dy = bh \qquad (37)$$

このように，境界における x と,y の関係，変域が解ると普通の積分と変わりなく計算できる。二回積分が入るので二重積分，あるいは，もっと積分記号が重なってはいる重積分という。

物理学では，重心の座標は

$$x_G = \frac{\int xdw}{\int dw} \qquad y_G = \frac{\int ydw}{\int dw} \qquad z_G = \frac{\int zdw}{\int dw} \qquad (38)$$

の式で与えられる。