力学の基礎

材料力学ばかりでなく、工学一般で、当たり前のように扱われている力学の基礎的知識について解説する。公式を覚えていただくことは目的ではなく、すでに学んだ簡単な事項について、どういうことを意味しているのか、じっくり考えて理解していただくことが目的である。そうすることによって、工学の専門科目にごくすんなりと入れることを期待している。

● 力とモーメント

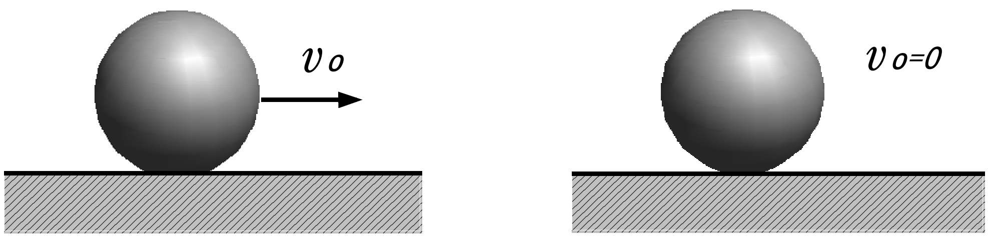
重量物を持ち上げる、ボウルを投げる、コンクリートの壁を強く押してみる、棒を両手でもって曲げてみるなど私たちが力を感じるときである。この力を物体に与えると物体はどのような状態変化を生ずるかを調べると力の性質などが理解できそうである。

■ 力と運動 ------ ニュートンの運動の3法則

ニュートンは力と物体の運動の経験的事実から、３つの法則にまとめた。力学の基礎であることは勿論、運動を扱わない材料力学においても力の性質や釣り合いなどの諸現象を理解する上で極めて重要である。

◆運動の第1法則（慣性の法則）

「物体に外部から力が作用しなければ、静止している物体は静止の状態を続け、運動をしている物体は等速直線運動を続ける」



(a) 慣性の法則 速度 vo の等速運動　(b) 慣性の法則 速度 0, 静止

図 1

【解説】

等速直線運動の速度が０の特別な場合が静止であること、また、多くの力が物体に作用しても、それらの合力が０（釣り合いの状態）であれば、力が働かない状態と同じであることに注意すべきである。材料力学では「力が作用しなければあるいは釣り合っていれば、物体は静止する」と考えて良い。

◆運動の第2法則

「質量mの物体に外部から力Fが作用すると、物体は力と同じ方向に、力の大きさに比例し、物体の質量に反比例する加速度aを生ずる」

$$F = ma \qquad (1)$$

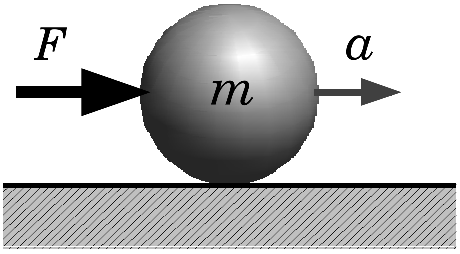
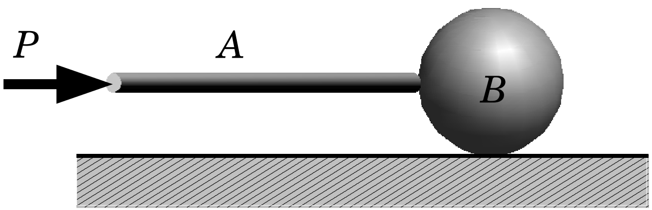


図 2　質量mの物体に外部から力Fが作用

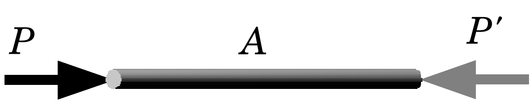
運動の状態を定量的に示したもので、第１法則のＦ＝０の時、加速度ａ＝０（速度は変化しない）では時間に関係なく, 常に一定の速度V_oで運動を続けることを示している。このうち，V_o＝０の特別な場合が静止である。

◆運動の第3法則　（作用・反作用の法則）

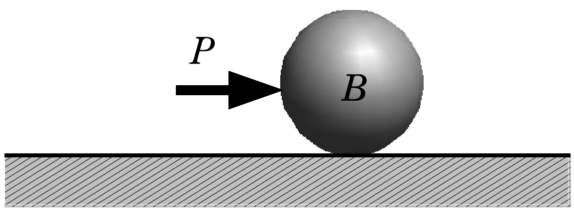
「物体Ｂが他の物体Ａにある力を作用させると，ＡはＢから必ず大きさが等しく向きが反対の力の作用を受ける」



(a)　物体Ａを介して物体ＢにＰの力が作用



(b) 物体Ａは物体ＢからＰ’の力を受ける
Ｐ ： 物体Ｂに作用した力
Ｐ’： 物体Ｂから受けた反作用力

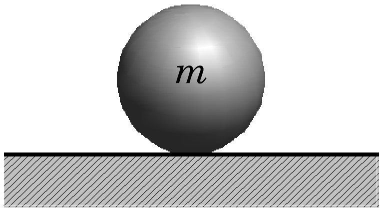


(c)　物体ＢにはＰの力が作用

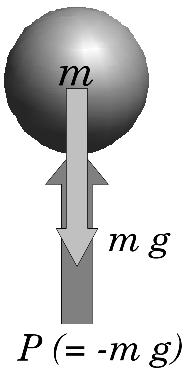
図3　Ｐ ： 物体Ｂに作用した力 ，　Ｐ’： 物体Ｂから受けた反作用力

Ｐ＝Ｐ’であり、向きは反対。A と B に作用する力の大きさは同じで無関係ではないこと、力はこの法則により伝達されることがわかる。

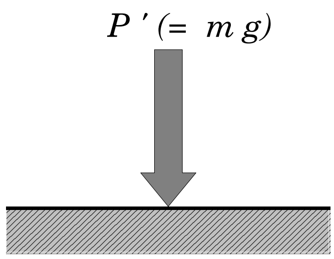
【例題 1】台の上に置かれた質量mの物体の場合



(a)　質量 m の物体



(b)力の釣り合い



(c)　台に作用する力

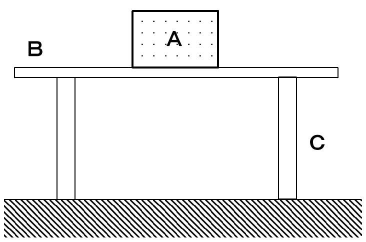
図 4　質量mの物体に作用する反作用力Ｐ　下向きを＋にとっている

台の上に置かれた質量 m の物体は静止している。これは物体に作用する力が釣り合っている。地球上の物体には重力が作用する。質量mの物体には mg の重力が作用している。この重力が台を mg の力で押して作用している。作用反作用の法則から，物体は，向きが反対（上向き）で大きさが等しい力（P=－ mg）を台から受ける．この反作用の力と重力が釣り合って（Ｐ＋ mg ＝０)，物体は静止する。

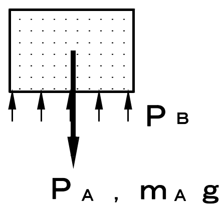
【例題 2】構造部材に作用する力の解析

机の上に置かれた、質量m_Aの物体について考える。作用・反作用の関係は物体Ａと机の天板Ｂの接触面で生ずる。

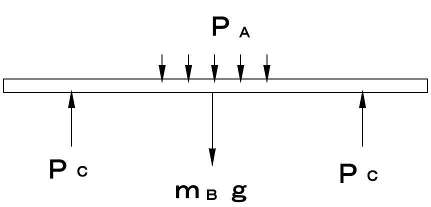
$$P_A = -P_B \tag{2}$$



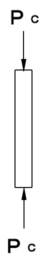
(a)



(b)物体Ａに作用する力



(c)天板Ｂに作用する力



(d) 脚Ｃに作用する力

図 5　質量m_Aの物体が机の上に置かれている場合

重力加速度ｇとすると物体には、重力$m_A g$の重力が作用する。物体Ａに作用する力は、P_A（重力$m_A g$）とP_B（天板からの反作用）である。物体Ａは、静止しているのであり、これらの２つの力は釣り合っている。

$$P_A + P_B = 0 \qquad \therefore P_A = -P_B \tag{3}$$

となり、向きは反対で，大きさは等しい（いずれも$m_A g$である)。

次に，天板Ｂに作用する力は、P_Aと天板の重力$m_B g$と机の４本の脚Ｃからの反力$4P_C$であり、釣り合っているから、

$$P_A + m_B g + 4P_C = 0 \tag{4}$$

脚Ｃは、床からと天板ＢからP_Cの力を受けて釣り合っている。このように、部材間には、作用・反作用の法則によって力が働き、部材を通して力が伝達され，その大きさは、互いに無関係ではないことが解る。このことように、多数の部材からなる構造物などの部材に働く力を解析することができる。

材料力学では「力が作用しなければ、物体は静止する」と考えて良い。また、多くの力が物体に作用しても、それらの合力が０（釣り合いの状態）であれば、力が働かない状態と同じである。

◆　剛体の運動

この内容については、教科書のカラム欄を参照のこと。

「力が釣り合っていれば平行移動しない，モーメントが釣り合っていれば回転しない」

一般に，形を有する物体が運動する場合，平行運動と回転運動の要素を含んでいる。基本的な運動の仕方は平行移動と回転である。渦を巻いて流れる流体，地球が自転をしながら太陽の周りを回るなどの例は典型的な例である。

平行移動（並進運動）における力Ｆの効果は、ものを持ち上げたり、押したり実感できる。また、大きい力を加えれば加速するのも大きいことも理解できる。

回転運動におけるモーメントＭも同じである。

◆　力のモーメント

図 7 は1点で支持されている棒に力P_1，P_2が作用している。P_1の力は、棒をO点の回りに反時計回りに回転させる。P_2の力は、棒を時計回りに回転させる。

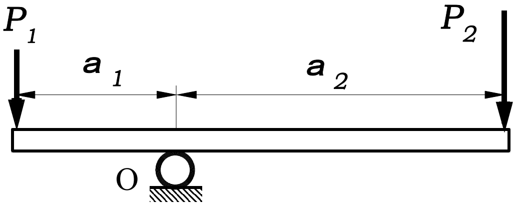


図6　モーメント

この、(力)×(支点からの距離)の量を**モーメント**と定義し、「**ある点の回りに物体を回転させる効果の大きさ**」を表し、厳密には、モーメントが存在するとき、$M=I\alpha$(回転運動の方程式，M はモーメント，I は慣性モーメント，αは角加速度，詳細は力学の教科書を参照のこと)の回転運動をする。反時計回りに回転させる場合を「＋」、時計回りに回転させる場合を「－」と符号を決める。

P_1の力によるO点に関するモーメントの大きさは、$+P_1a_1$,
P_2の力によるO点に関するモーメントの大きさは、$-P_2a_2$

O点に関するモーメントの合計の大きさMoは

$$Mo=P_1a_1-P_2a_2 \tag{5}$$

となる。このようにモーメントは符号を考えるだけで簡単に加えることができる。モーメントの大きさは，基準になる点や軸から力が作用する位置までの距離，力の大きさで決まる。

$Mo=0$のとき、反時計、時計方向に回転させる効果はキャンセルされ、回転させる効果は、消失する。すなわち、モーメントが釣り合っている。このとき、力と距離の関係は次式となる。

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{a_2}{a_1} \qquad \frac{P_1}{P_2}=\frac{a_2}{a_1} \qquad P_1a_1=P_2a_2$$

$$P_1a_1=P_2a_2 \tag{6}$$

◆　作用線が一致しない平行力の合成平行力の合成

図7のように2つ以上の平行な力が作用する場合の合力を求める。1点に作用する多くの力と同様に、力の効果が同じであればよい。平行力の場合は、作用点が異なるから、回転する作用が生ずるので，モーメントも考慮する必要がある。O点に関するモーメントを考えるとき

$P_1 + P_2 \ + \ P_3 \ = R$ (7)

（図 7(a)のモーメントの和M_o）＝（図 7(b)のモーメント、－Ｒｘ$_o$）

(8)

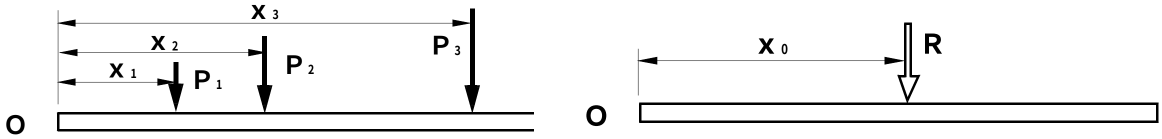
となる必要がある。従って，M_o＝－Ｒｘ$_o$ となる。

$$R = P_1 + P_2 + P_3 \qquad \leftarrow \text{ 力の大きさが等しい}$$

$$M_O = -P_1x_1 - P_2x_2 - P_3x_3 = -Rx_0 \qquad \leftarrow \text{ モーメントが等しい}$$

$$\therefore \quad x_0 = \frac{P_1x_1 - P_2x_2 - P_3x_3}{P_1 + P_2 + P_3} \tag{9}$$

と求められる。



(a)

(b) Ｒは，Ｐ$_1$，Ｐ$_2$，Ｐ$_3$が同時に作用したのと同じ力の効果

図 7　Ｐ$_1$，Ｐ$_2$，Ｐ$_3$の平行力の合成，合力の大きさＲと作用する位置 x_o

合力Ｒと作用点の位置 x_o を上式の値にとれば，(a)の場合と全く同じ回転の効果と平行移動の効果となる。多くの力を取り扱うよりも，１つの力で代表させることができれば計算も単純化され，解析も簡単になるので，必要に応じて，合成したり，分解したりする。

【例題 4】平行力の合成の応用　　---重心の位置を求める場合

水平に置かれた棒をｎ個の部分に分割する。 分割された物体の各部分に作用し、分布している重力は、方向が同じ（鉛直下向き）で、平行である。この力を合成し、１つの合力にまとめたとき、この合力の作用線の位置が重心である。

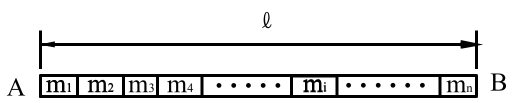
合力の大きさWは、前述の結果から，物体の質量Mとおくと

$$W = m_1 g + m_2 g + \cdots\cdot \quad + m_i g + \cdots\cdot \quad + m_n g$$

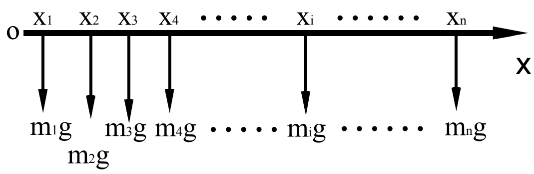
$$= \sum_{i=1}^{n} m_i g = Mg \tag{10}$$

Ａに関するモーメントＴ’は、図 8(a)と図 8(c)の場合に等しくなることが必要（合力の説明の項参照）があるのでモーメントを求める。

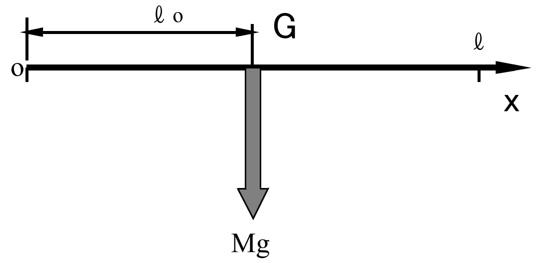
$$T' = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + \cdots\cdot \quad + m_i g x_i + \cdots\cdot \quad + m_n g x_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} m_i g x_i \tag{11}$$



（a）　n個の部分に分割



（b）分割した部分に重力が作用



（c）　重力を合成

図８　合力の作用する位置が重心Ｇ

簡単にするために，ｎ等分の時、

$$dx = \ell / n, \qquad x_i = (i-1)dx, \qquad m_i = m = M/n$$
$$T' = \sum_{i=1}^{n} m_i g x_i = \sum \left(\frac{M}{n}\right) g (i-1) \frac{\ell}{n} = \frac{Mg\ell}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1)$$
$$= \frac{Mg\ell}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{Mg\ell}{2} \frac{n-1}{n} \tag{12}$$

極限値を求めると重力によるモーメントの総和Ｔ’は

$$\lim_{n\to\infty} T' = \lim_{n\leftarrow\infty} \frac{Mg\ell}{2} \frac{n-1}{n} = \frac{Mg\ell}{2} \tag{13}$$

となる。

同じ重力によるモーメントの総和Ｔ’を求めるのに，積分法を利用して求めてみる。微小部分 dx に作用する重力は，単位長さ当たり（M/ℓ)g であるから、dx の部分には,（M/ℓ)gdx の重力が作用する。A 点からの距離ｘ、この部分のモーメントΔＴは、

ΔＴ　＝　（M/ℓ)gdx· ｘ　　（区分積分法のＡ$_i$）

$$\Delta T = \left(\frac{Mg}{\ell}\right) dx \cdot x \tag{14}$$

上式を０からℓまで積分を行う（区分積分法，A_iの和をとり、極限値を計算に相当）と

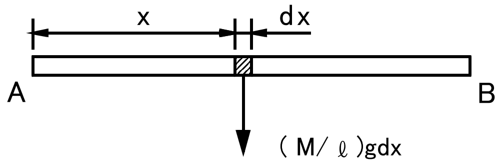


図 14

$$T = \frac{Mg}{\ell}\int_0^{\ell} x dx = \frac{Mg}{\ell}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\ell} = \frac{Mg\ell}{2} \tag{15}$$

なる。一方、W(=Mg)によるモーメントM_Aは、作用点ℓ_0と置き

$$M_A = W \cdot \ell_0 \tag{16}$$

力を合成しない時のモーメントの大きさと合成した力によるモーメントの大きさは等しい，$T = M_A$から、

$$\frac{Mg\ell}{2} = W\ell_0 \qquad \therefore \ell_0 = \frac{\ell}{2} \tag{17}$$

となる。作用点ℓ_0が重心の位置で、断面が一様な棒の場合は中点である